PROBLEMAS RESUELTOS DE GRAFICACIÓN DE CAMPOS VECTORIALES.

Problemas de nivel intermedio.

Problema 1

Graficar el campo vectorial dado por:

$$\overline{F}(\overline{r}) = \begin{cases} -2\,\overline{1x}, \text{ si } x \leq -2, |y| < \infty, |z| < \infty \\ x\,\overline{1x}, \text{ si - } 2 \leq x < 2, |y| < \infty, |z| < \infty \\ \overline{0}, \text{ si } x > 2, |y| < \infty, |z| < \infty \end{cases}$$

<u>Solución</u>.

Primero corresponde elegir un sistema de coordenadas. El eje de abcisas debe ser el eje *x* porque el campo depende de esta variable. Dado que la dirección del campo es paralela al eje *x*, puede elegirse indistintamente el eje *y* o el eje *z* como eje de ordenadas. Se dibuja entonces el plano *XY* con líneas en $x=-2$ y en $x=2$ que representan la separación entre las regiones. De los ejemplos presentados en la teoría se sabe que para representar el campo uniforme de la región $x<-2$ basta con dibujar líneas equidistantes, mientras que para representar el campo nulo de la región $x>2$ no hay que hacer nada.

En la figura 1 de la siguiente página se muestra el dibujo del campo para estas dos regiones. Luego se insertará el dibujo correspondiente a la región $-2<x<2$. Nótese en la figura 1 que se ha indicado el sentido del campo de la región $x<-2$ con flechas dibujadas en medio de las líneas, para representar que el campo se extiende hasta el infinito.

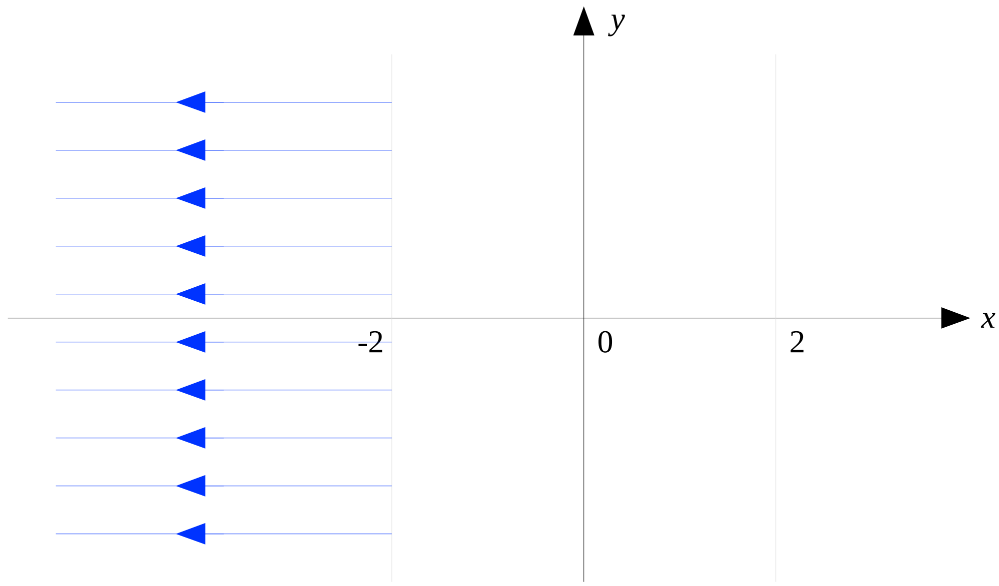

Figura 1: Gráfica del campo $\overline{F}(\overline{r})$ para $x<-2$ y $x>2$.

Para hacer el dibujo correspondiente a la región $-2<x<2$ hay que tomar en cuenta que la función x es negativa para $-2<x<0$ y positiva para $0<x<2$, teniendo simetría impar. Por lo tanto, basta hacer el dibujo para una de estas dos subregiones y duplicar el mismo para la otra, cambiando sólo el sentido del campo. Para dibujar el campo en la subregión $-2<x<0$ hay que tomar en cuenta que el campo es continuo en $x=-2$, por lo que el número de líneas que debe existir a la derecha de $x=-2$ debe ser el mismo que hay a la izquierda. Para dar la impresión de que la magnitud del campo decrece linealmente a medida que x se aproxima a cero, debe disminuirse progresivamente el número de líneas de flujo, lo que puede hacerse terminando a cada línea en un punto intermedio distinto, como se muestra en la figura 2.

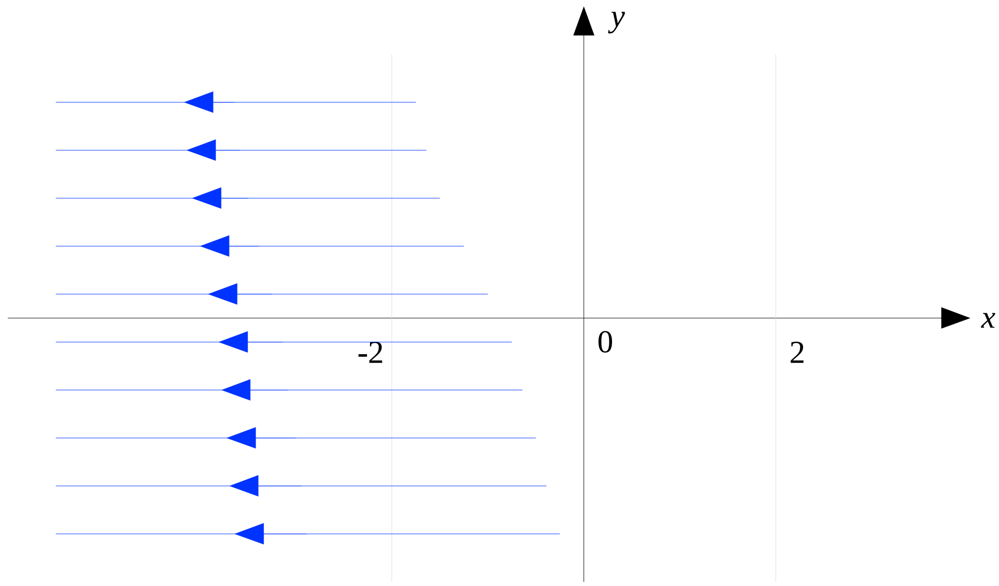

Figura 2: Gráfica del campo $\overline{F}(\overline{r})$ para $x<-2$, $-2<x<0$ y $x>2$.

En la figura 2, sin embargo, al haberse prolongado secuencialmente las líneas de flujo, da la impresión de que en la región $-2<x<0$ la magnitud del campo decreciera conforme aumenta y, lo cual es incorrecto, ya que el campo no depende de y. El dibujo debe corregirse para eliminar esta impresión, lo cual se logra evitando la secuencialidad o también mediante secuencias cortas que se repiten, como se muestra en la figura 3 de la siguiente página. La repetición de las secuencias se usa para dar la impresión de invariabilidad del campo respecto a la coordenada y.

En la figura 3 puede observarse que en la región $-2<x<0$ no se dibujaron flechas para indicar las líneas del campo, ya que éstas son prolongación de las líneas existentes en la región $x<-2$. En el caso de que el campo hubiese sido discontinuo en $x=-2$, sí hubiese sido necesario dibujar flechas del campo en la región $-2<x<0$, ya que el número de líneas de flujo a la izquierda y a la derecha de $x=-2$ sería distinto. Puede observarse también la simetría del dibujo para la región $0<x<2$, con las líneas de flujo terminadas en flechas porque hay una discontinuidad del campo en x=2.

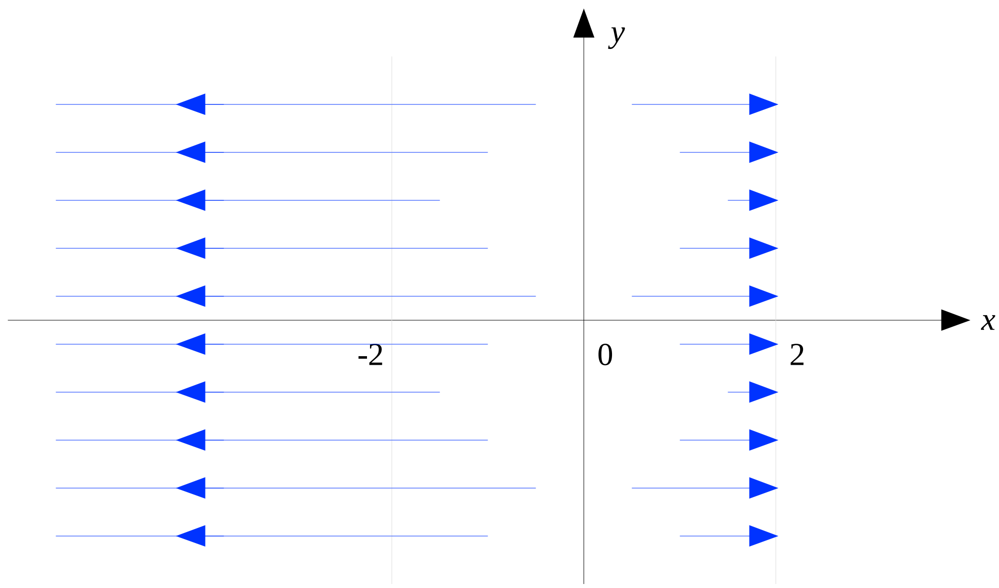

Figura 3: Gráfica corregida y completa del campo $\overline{F}(\overline{r})$.

Problema 2

Graficar el campo vectorial dado por:

$$\overline{G}(\overline{r}) = \begin{cases} \overline{1y}, \text{si } x \leq -2, |y| < \infty, |z| < \infty \\ x\,\overline{1y}, \text{si - } 2 \leq x < 2, |y| < \infty, |z| < \infty \\ \overline{0}, \text{si } x > 2, |y| < \infty, |z| < \infty \end{cases}$$

Solución.

Dado que el campo depende de la variable x y es paralelo al eje y, debe hacerse el dibujo en el plano XY. De los ejemplos presentados en la teoría se sabe que para representar el campo uniforme de la región x<–2 basta con dibujar líneas equidistantes, mientras que para representar el campo nulo de la región x>2 no hay que hacer nada. En x=–2 el campo cambia en magnitud y sentido, teniendo en x=–2^{+} el doble de la amplitud que tiene en x=–2^{-}. Por lo tanto, la primera línea de flujo a la derecha de $x=-2$ debe tener respecto a este punto la mitad de la separación de la primera línea de flujo a la izquierda. En la figura 4 se muestra el dibujo del campo de la región $x<-2$ con la primera línea del campo de la región $-2<x<0$.

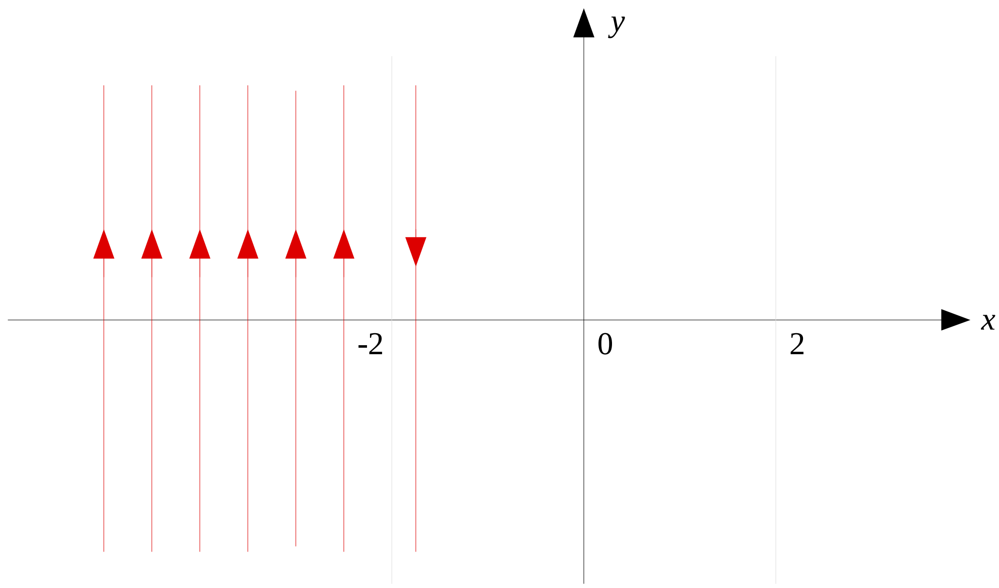

Figura 4: Gráfica del campo $\overline{G}(\overline{r})$ hasta $x=2^{+}$.

Para graficar el campo en la región $-2<x<2$, aprovechando la simetría impar de la función x se grafica primero entre $-2<x<0$ y luego se aplica la simetría para hacer el dibujo correspondiente a $0<x<2$. El dibujo para $-2<x<0$ debe representar una disminución gradual de la magnitud del campo hasta que éste se anula en $x=0$. Esto se hace aumentando gradualmente la separación entre las líneas. La figura 5 muestra la gráfica completa del campo.

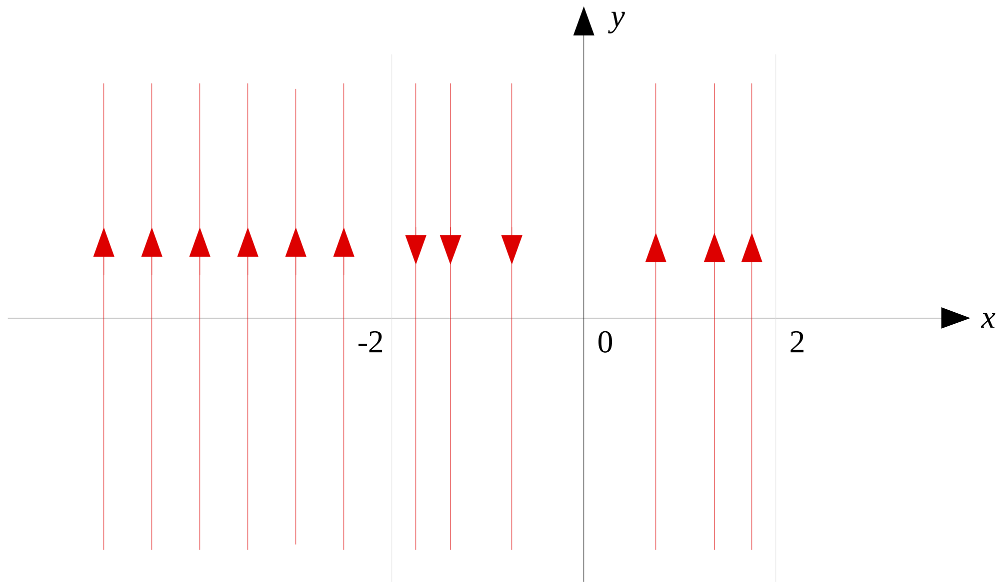

Figura 5: Gráfica completa del campo $\overline{G}(\overline{r})$.

Problema 3

Graficar el campo vectorial dado por:

$$\overline{A}(\overline{r}) = \begin{cases} \overline{1\rho}\,2\rho, \text{si } \rho < 1, 0 \leq \phi < 2\pi, |z| < \infty \\ \overline{1\rho}\,4\rho^{-1}, \text{si } 1 < \rho < 2, 0 \leq \phi < 2\pi, |z| < \infty \\ \overline{0}\,, \text{si } \rho > 2, 0 \leq \phi < 2\pi, |z| < \infty \end{cases}$$

Solución.

Dado que este campo varía con la coordenada radial, se elige como sistema de coordenadas el plano *XY*, lo que permite además mostrar que el campo es invariante respecto a la coordenada angular. Como el campo es discontiuo en ρ=1 y en ρ=2, se indican estas discontinuidades mediante circunferencias en color gris (también podrían usarse líneas interrumpidas), como se muestra en la figura 6.

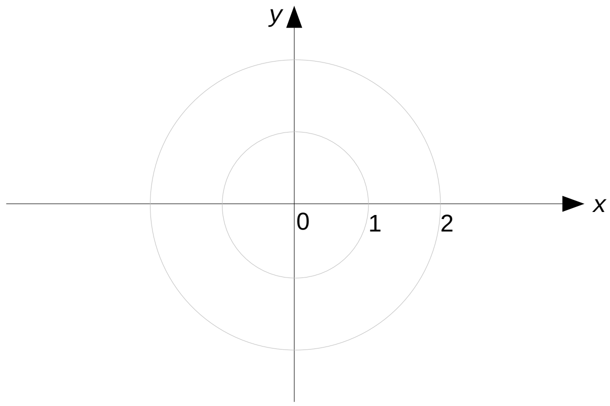

Figura 6: Sistema de coordenadas para graficar el campo $\bar{A}(\bar{r})$.

En la región $\rho<1$ el campo aumenta linealmente su magnitud, siendo nulo en $\rho=0$, mientras que para $1<\rho<2$ la magnitud del campo decrece como $1/\rho$. Además, en $\rho=1^-$ el campo tiene la mitad del valor que tiene en $\rho=1^+$. Además, el campo tiene simetría angular. Debe tomarse en cuenta todo esto para graficar el campo.

Comenzando por la gráfica para la región $1<\rho<2$, la forma de representar el decrecimiento del tipo $1/\rho$ es haciendo que el número de líneas que sale de $\rho=1$ sea igual al número de líneas que llega a $\rho=2$. Esto es así porque de esa manera el flujo total del campo a través de cualquier cilindro concéntrico con radio entre 1 y 2 es constante, lo cual indica que el campo debe decrecer como $1/\rho$ para compensar el crecimiento lineal del área del cilindro con el radio. En conclusión, cualquier campo radial que decrezca proporcionalmente a $1/\rho$ se representa con un número de líneas de flujo constante, equiespaciados angularmente, como se muestra en la figura 7.

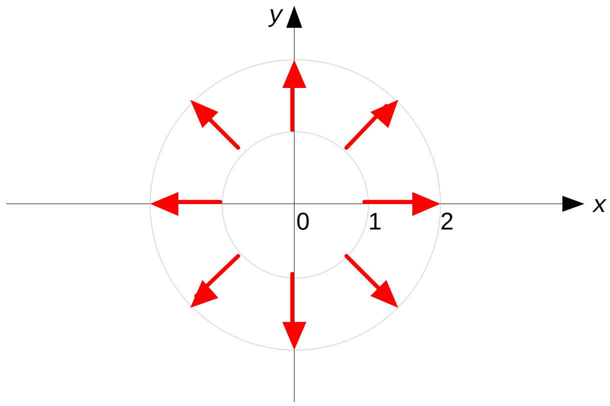

Figura 7: Gráfica del campo $\bar{A}(\bar{r})$ para 1<ρ<2.

Para representar el campo en la región ρ<1, tomando en cuenta que en ρ=0 es nulo y que el valor en $\rho=1^{-}$ es la mitad del valor que tiene en $\rho=1^{+}$, se dibuja en $\rho=1^{-}$ la mitad de las líneas que hay en $\rho=1^{+}$, y en vez de prolongar estas líneas hasta el centro, se prolongan sólo hasta aproximadamente ρ=1/2, para representar tanto la disminución del valor del campo al reducir el radio como la desaparición del campo en ρ=0, como se muestra en la figura 8.

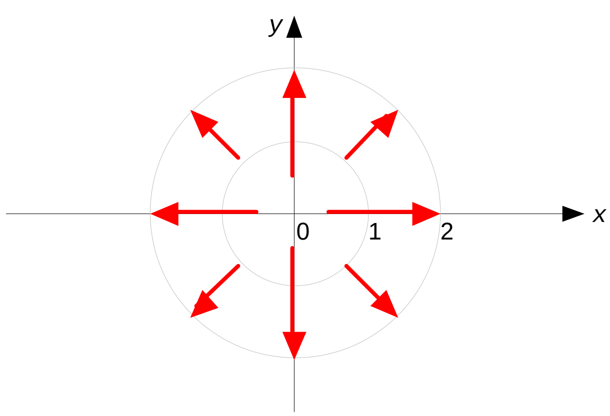

Figura 8: Gráfica del campo $\bar{A}(\bar{r})$ para 0<ρ<2.

El dibujo de la figura 8 pudiera mejorarse duplicando el número de líneas de flujo en las dos regiones, lo que permitiría representar mejor el decrecimiento del campo a medida que el radio se reduce, pero por los momentos esta gráfica se considerará bastante aceptable. Finalmente, para representar el campo nulo existente para ρ>2 no hay que dibujar nada, por lo que la figura 8 es también la gráfica del campo $\overline{A}(\overline{r})$ para todo el espacio.

Problemas de nivel avanzado.

Problema 1

Problema 2